

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

CONCOURS D'ENTRÉE - SESSION 1988
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Cette épreuve est destinée aux élèves des classes de Mathématiques Spéciales M, M', P, P', T, TA, TB.

-I-

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications f continues sur $]0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f(t)dt$$

converge.

Soit F l'ensemble des applications f continues sur $]0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f^2(t)dt$$

converge.

1. Montrer que tout élément f de F appartient à E (on montrera que l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ de tout élément f de F est absolument convergente).
En déduire que F a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.
Pour quelles valeurs de α , f est-elle élément de E , de F ?
3. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.
Pour quelles valeurs de α , f est-elle élément de E , de F ?
4. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\ln(t))^n$ avec n entier naturel ($\ln$ désigne le logarithme népérien).
 f est-elle élément de E , de F ?

-II-

Soit G le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications f continues sur $]0, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f(t)dt$$

converge.

1. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{t}$. f est-elle élément de G ? Si oui, calculer $I = \int_0^1 f(t)dt$.
2. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\ln(t)}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}$
 - (a) Montrer que f est un élément de G .
 - (b) Calculer $I = \int_0^1 f(t)dt$ (on pourra faire le changement de variable $x = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$).
3. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{(\ln(t))^n}{(1-t)^\alpha}$ avec α réel et n entier naturel.
 - (a) Déterminer, à quelle condition sur α et n , f est un élément de G .
 - (b) Calculer $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt$.

4. Soit $f_\alpha :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(t) = \frac{t^\alpha - 1}{\ln(t)}$ avec α réel.
- (a) Déterminer l'ensemble U des valeurs de α pour lesquelles f_α est élément de G .
 - (b) α étant élément de U , on pose $I_\alpha(x) = \int_0^x f_\alpha(t) dt$. Montrer que $I_\alpha(x) = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{du}{\ln(u)}$.
 - (c) En déduire la valeur de $I_\alpha = \int_0^1 f_\alpha(t) dt$.

FIN DÉ L'ÉPREUVE